Příklady k cvičení č.12

III.3. Intervalové odhady

Cvičení 1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

(a) Nechť σ^2 je známé. Zdůvodněte, že pak

$$\mathbb{P}\left(-u_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{X_n - \mu}{\sigma} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{|X_n - \mu|}{\sigma} \leq u_{1-\alpha/2}\right) \to 1 - \alpha, \quad n \to \infty,$$

kde $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ je kvantil $N(0,1)$ na hladině $1-\alpha/2$. Na základě tohoto vztahu zkonstruujte intervalový odhad pro μ s asymptotickou spolehlivostí $1 - \alpha$.

(b) Prozkoumejte, na čem a jak závisí délka intervalového odhadu z (a).

(c) Odvoďte intervalový odhad pro μ, je-li σ^2 neznámé.

(d) V hospodě jsme zakoupili 10 piv a zaznamenali jsme objem natočeného piva s cílem zjistit, zda je skutečná střední hodnota natočeného piva rovna 0.5 l. Dostali jsme $\bar{X}_{10} = 0,480$, $S_{10} = 0,019$. Zkonstruujte intervalový odhad se spolehlivostí 95% pro střední hodnotu natočeného piva. Překrývá tento interval hodnotu 0.5?

Cvičení 2. Bylo provedeno měření IQ náhodně vybraných žáků ZS, a to u 50 děvčat a 50 chlapců. Pro děvčata bylo naměřeno průměrné IQ $110,82$ (výb. směr. odch. $13,69$) a pro chlapce byl průměr $107,66$ (výb. směr. odch. $15,71$). Zkonstruujte interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot IQ dívek a chlapců. Uvažujte spolehlivost 95%. Pokrývá tento interval nulu? Co by to znamenalo, kdyby jej nepokrýval?

IV.1. Podmíněné rozdělení

Cvičení 3. Uvažujme hod dvěma kostkami. Označme X počet ok, které padnou na první kostce, Y počet ok, které padnou na druhé kostce, a $S = X + Y$ jejich součet. Určete podmíněné rozdělení a podmíněnou střední hodnotu X za podmínky, že $S = 6$.

Cvičení 4. V předchozím příkladě určete podmíněné rozdělení a podmíněnou střední hodnotu $V = XY$ za podmínky $S = 6$.